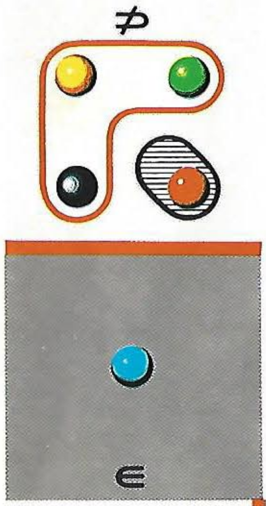
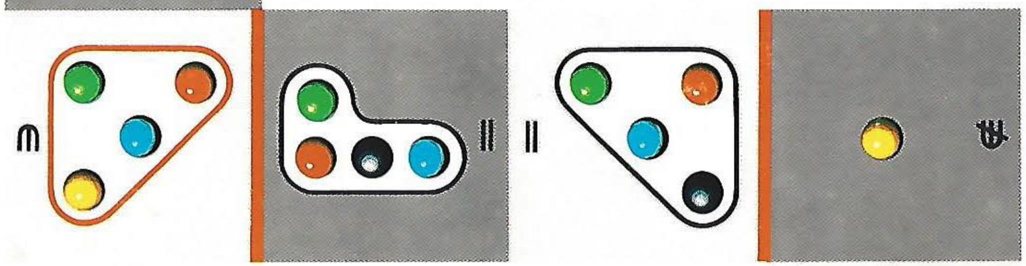
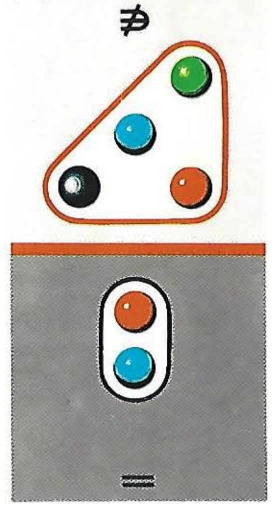
Elementare
Mengenlehre







Eine Einführung für Eltern,
ein Lernspiel für Kinder
von Dorothea Keune

Berliner Spielkarten GmbH & Cie, 1 Berlin 61, Obentrautstraße 6

Spielregel:

Es können sich beim einstufigen Spiel bis zu 5, beim zweistufigen Spiel bis zu 11 und beim dreistufigen Spiel bis zu 18 Spieler am Spiel beteiligen.
Die Karten werden gut gemischt und einzeln verteilt; die letzte Karte kommt zur Tischmitte und bildet den Anfang. Jeder Spieler legt seine Dominokarten offen vor sich hin.
Der Sinn des Spieles besteht darin, an die gestellte Aufgabe die richtige Lösung anzulegen **oder** zu der gegebenen Lösung die entsprechende Aufgabe zu finden.
Der Spieler, der beim Verteilen der Karten die letzte erhalten hat, darf beginnen. Er prüft seine Operationsmöglichkeiten und darf eine Dominokarte anlegen. Hat er keine geeignete Karte oder findet er keine Anlegemöglichkeit, muß er passen. Nun kommt der links neben ihm sitzende Spieler an die Reihe.
Entdeckt ein Spieler, daß ein anderer eine nicht passende Dominokarte angelegt hat, ehe an die fälschlicherweise ausgelegte Karte bereits angelegt wurde, muß dieser andere die Karte zurücknehmen und bekommt außerdem vom Entdecker des Fehlers eine beliebige Karte ausgehändigt. In diesem Fall kommt der Spieler, der den Fehler bemerkte, als nächster an die Reihe.
Wird jedoch ein Fehler erst im späteren Verlauf des Spieles entdeckt, darf der Entdecker die falsch angelegte Karte **und** alle daran angelegten Karten an seine Mitspieler einzeln verteilen und kann dann mit Anlegen fortfahren.
Sind durch Schließen der Dominokette alle Möglichkeiten erschöpft, das Spiel fortzusetzen, darf der Spieler, der die Schlußkarte legte, mit einer beliebigen Karte sofort ein neues Domino eröffnen.
Gewinner ist, wer zuerst keine Dominokarten mehr besitzt.

ELEMENTARE MENGENLEHRE

Nachdruck oder Vervielfältigungen,
auch auszugsweise, sind ausdrücklich
verboten.

Übersicht der im Spiel vorkommenden Operationszeichen:

Stufe	Farbe der Mittellinie	Symbol	Bedeutung	Erklärung s. Seite
I	rot	$\in$	Element	5
I	rot	$\notin$	nicht Element	6
I	rot	$=$	identisch	6
I	rot	$\neq$	nicht identisch	7
I	rot	$\subset$	Teilmenge	7
I	rot	$\not\subset$	nicht Teilmenge	8
II	blau	$\cap$	Schnittmenge	9
II	blau	$\cup$	Vereinigungsmenge	10
II	blau	$\setminus$	Differenzmenge	10
II	blau	$\complement$	Komplementmenge	11
II	blau	$\sim$	äquivalent	12
II	blau	$\nsim$	nicht äquivalent	12
III	grün	card	Kardinalzahl	14
III	grün	$\times$	Kreuz	16
III	grün	$\nrightarrow$	keine Abbildung	18
III	grün	$\xrightarrow{sur}$	Surjektion	19
III	grün	$\xrightarrow{in}$	Injektion	19
III	grün	$\xrightarrow{bi}$	Bijektion	20

In der Aufgabe ist die Ausgangsmenge immer schwarz umrandet; sie soll zu der rot umrandeten Menge in Beziehung gebracht, mit ihr verknüpft oder ihr zugeordnet werden, je nachdem, welche Operation das Operationszeichen verlangt.

Das Operationszeichen ist immer an der Unterkante der in Längsrichtung betrachteten Dominokarte angebracht (also an der Anlegekante) und wird von dorther gelesen.

Die Lösung muß die ausgeführte Operation einer gestellten Aufgabe zeigen. Bilden die schwarz umrandete Menge und die rot umrandete Menge nach Ausführung der Operation eine neue Lösungsmenge, so ist diese durch Schraffur gekennzeichnet.
Aufgabe und Lösung tragen immer das gleiche Operationszeichen. Da jede Operation im Spiel in fünf verschiedenen Aufgaben durchgeführt wird, bedeutet das Aneinanderlegen gleicher Operationszeichen **nicht** automatisch die richtige Lösung. Hier heißt es aufpassen und überlegen!

Vorwort

Die Notwendigkeit, den Mathematik-Unterricht in unseren Schulen zu erneuern, ihn dem kindgemäßen Denken anzupassen, besteht seit langem.
Durch Erlaß der Kultusminister der Länder wird im Schuljahr 1972 die Unterrichtung der „Neuen Mathematik" in allen Schulen der Bundesrepublik und West-Berlin zur Pflicht. Damit wird der uns bisher gewohnte Rechenunterricht, der vor allem in den ersten Klassen nicht viel mehr bedeutete als das Training bestimmter Rechenfertigkeiten, abgelöst von der sogenannten „Mengenlehre". Ohne Zweifel kommen unsere Kinder dadurch in den Genuß eines großen pädagogischen Fortschritts, der Mathematik **allen** zugänglich und verständlich machen wird. Die Freude am logischen Denken, die Freude am logischen Handeln nach sich zieht, wird sich mit jeder neugewonnenen und angewandten Erkenntnis vergrößern. Das „Mengendenken" wird unseren Kindern Spaß machen, weil es ihnen leichtfällt. Sie werden feststellen, daß es auf einer Logik beruht, die sie auch in allen anderen Denkbereichen antreffen.
Die Überbeanspruchung der Lehrer an unseren Schulen und überfüllte Klassenzimmer zwingen die Eltern, sich ebenfalls mit der Mengenlehre zu befassen, um ihren Kindern hilfreich zur Seite stehen zu können. Kurioserweise ist für Erwachsene die Mengenlehre schwerer zu erfassen als für Kinder, die unbelastet an sie herangeführt werden. Sie werden dies selbst beim Spiel feststellen, was nicht zuletzt dessen Reiz erhöhen wird.
Die ELEMENTARE MENGENLEHRE wird hier in drei Stufen an Beispielen erklärt. Spielend erlernen wir anhand von Aufgabe/Lösungs-Beispielen die Operationen der ELEMENTAREN MENGENLEHRE.
Die Stufe I befaßt sich mit BEZIEHUNGEN von Mengen, die Stufe II mit VERKNÜPFUNGEN von Mengen und die Stufe III mit ZUORDNUNGEN von Mengen. Jede Stufe ist für sich allein spielbar, läßt sich aber durch Verbindungskarten zu einem umfangreichen Lernspiel erweitern. Die folgende EINFÜHRUNG in die MENGENLEHRE soll uns helfen, den elementaren Sinn und die eigentliche Logik der MENGENOPERATIONEN zu erfassen.

Einführung in die Elementare Mengenlehre

von Dorothea Keune

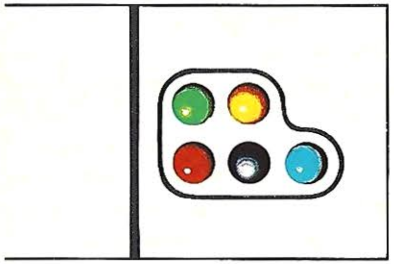
MENGE

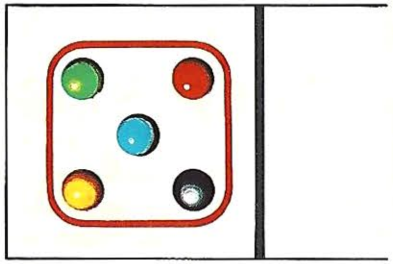
Zuerst wollen wir wissen: Was ist eigentlich eine **Menge?**
Eine Menge können wir nicht definieren, aber erklären als „jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung, unseres Denkens zu einem Ganzen" (Cantorsche Mengenerklärung).
Wir bilden also eine Menge, wenn wir festlegen, welche Objekte dazu gehören.
Nehmen wir an, wir haben eine Menge Kugeln. Die Kugeln – die Objekte unserer Menge – unterscheiden sich in einer bestimmten Eigenschaft: der Farbe. Wir haben eine rote, eine blaue, eine grüne, eine gelbe und eine schwarze Kugel; sie bilden unsere Ausgangsmenge, die sogenannte **Grundmenge.**

GRUNDMENGE

MENGENBILD

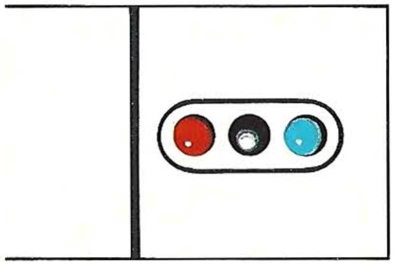
Wollen wir diese Menge Kugeln veranschaulichen, zeichnen wir uns ein **Mengenbild,** auch „Venn-Diagramm" oder „Euler-Diagramm" genannt. Um die Objekte der Menge zeichnen wir eine geschlossene Linie und begrenzen so die Objekte, die zur gebildeten Menge gehören sollen:



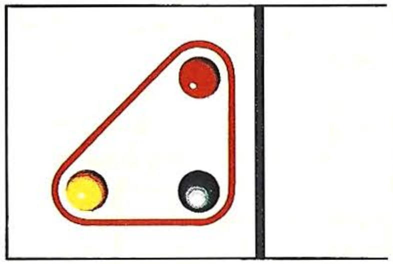


MENGENZEICHEN

Als **Zeichen für Mengen** verwenden wir große Buchstaben:
A, B, C, D, E, F . . . M . . .



A



B

Elementare Mengenlehre

Spielanleitung:

Das Spiel ist in drei Stufen aufgebaut. Die einzelnen Stufen sind durch unterschiedliche Farben der Mittellinien gekennzeichnet und umfassen je 30 Dominokarten.

Stufe I (rote Mittellinien) behandeln BEZIEHUNGEN von Mengen:
a/ Elementbeziehungen
b/ Identitätsbeziehungen
c/ Teilmengenbeziehungen

Stufe II (blaue Mittellinien) erläutert VERKNÜPFUNGEN und ÄQUIVALENZ von Mengen:
a/ Schnittmengen und Vereinigungsmengen
b/ Differenzmengen und Komplementmengen
c/ Äquivalenzmengen

Stufe III (grüne Mittellinien) erklärt ZUORDNUNGEN von Mengen:
a/ Kardinalzahlen
b/ Paarmengen
c/ Abbildungen

Jede Stufe ist für sich allein spielbar. Es können auch zwei oder drei Stufen in einem Spiel Verwendung finden, wenn dazu die Verbindungskarten mit den entsprechenden zweifarbigen Mittellinien herangezogen werden.

Verbindungskarten:

zu verbindende Stufen	Farbe der Mittellinien	Stück
Stufe I und Stufe II	rot/blau	6
Stufe II und Stufe III	blau/grün	6
Stufe III und Stufe I	grün/rot	6

Wenn gleichzeitig mit allen drei Stufen gespielt werden soll, werden alle 18 Verbindungskarten verwendet.

Jede Dominokarte trägt auf dunklem Feld die **Aufgabe** und auf hellem Feld die **Lösung** irgendeiner anderen Aufgabe. Es wird immer nur Lösung an Aufgabe oder Aufgabe an Lösung angelegt!

$\xrightarrow{\text{in}}$

Wir schreiben:

$$A \xrightarrow{\text{in}} B$$

und lesen: „*A* in *B*".

Sind, wie im folgenden Beispiel gezeigt, die Mengen *A* und *B* gleichmächtig, und trifft jedes Element der Menge *A* genau auf ein Element der Menge *B*, so haben wir eine eineindeutige Abbildung oder **Bijektion**.

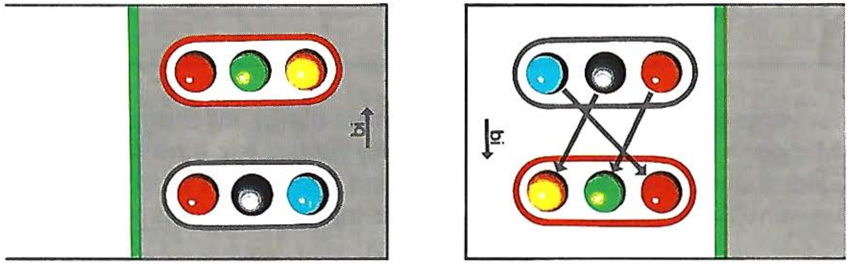
Definition einer Bijektion: Eine Abbildung $A \longrightarrow B$, bei welcher jedes Element von *B* Bild von genau einem Element von *A* ist, heißt bijektive Abbildung oder Bijektion.

$\xrightarrow{\text{bi}}$

Wir schreiben:

$$A \xrightarrow{\text{bi}} B$$

und lesen: „*A* bi *B*".



$\longleftrightarrow$

Eine Bijektion ist sowohl surjektiv als auch injektiv. Da sie eineindeutig ist, ist sie auch umkehrbar. Daher können wir auch schreiben:

$$A \longleftrightarrow B$$

und lesen: „*A* Umkehrpfeil *B*".

Jede einzelne Kugel ist ein Objekt unserer Menge. Die einzelnen Objekte, die zu einer Menge gehören, bezeichnen wir als **Elemente** dieser Menge. Ist ● ein Element der Menge, die wir *M* nennen wollen, so schreiben wir:

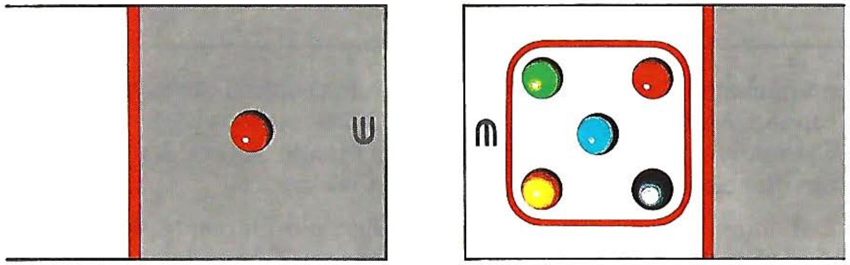
$\in$

$$● \in M$$

und wir lesen: „ ● ist ein Element von *M*".

$\in$ nennen wir die Zugehörigkeitszeichen oder Zeichen der Elementbeziehung. Die Elemente selbst bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben:

$$a, b, c, d, e \ldots$$



a *M*

In dieser Abbildung, die zwei Karten aus unserem Spiel zeigt, sehen wir auf der linken Seite im dunkelgrauen Feld eine rote Kugel, das Element *a*. An der Unterkante der in Längsrichtung betrachteten Dominokarte steht das Operationszeichen, das uns die Aufgabe stellt, eine Menge zu finden, die dieses Element enthält.

Als Lösung kommt **nur** eine Karte in Frage, die auf hellem Grund ebenfalls an der Unterkante dasselbe Operationszeichen trägt und in der dargestellten Menge die rote Kugel, das Element *a*, zeigt. Die rot umrandete Menge *M* erfüllt diese Aufgabe.

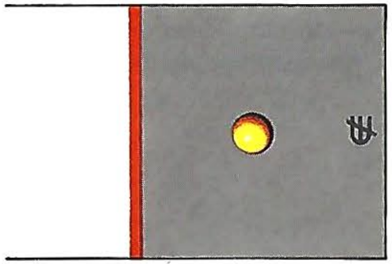
∉

Im folgenden Beispiel wird die Aufgabe gestellt, eine Lösungskarte zu finden, die das gleiche Operationszeichen trägt und in der dargestellten Lösungsmenge das Element nicht enthält; ist also **nicht Element** der Menge *M*.

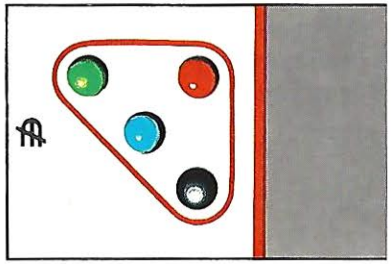
Ist ein Objekt, das nicht zur Menge *M* gehört, so schreiben wir:

 $\notin M$

und lesen: „ ist nicht Element von *M*".



b



M

=

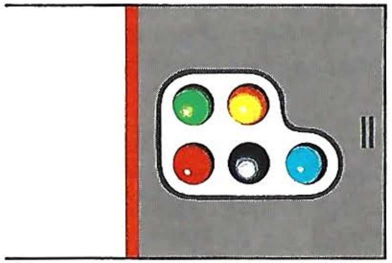
Im nächsten Beispiel haben wir im Aufgabenfeld die schwarz umrandete Menge *A* und im Lösungsfeld die rot umrandete Menge *B*. Stellen wir fest, daß es sich bei der Menge *A* und der Menge *B* um dieselbe Menge handelt, kommen wir zur

Definition der identischen Menge: Sind die Elemente der Menge *A* identisch mit den Elementen der Menge *B*, haben wir dieselben Mengen.

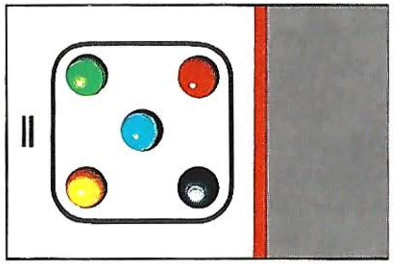
Wir schreiben:

$$A = B$$

und lesen: „*A* gleich *B*" oder auch „*A* identisch mit *B*".



A



B

sur→

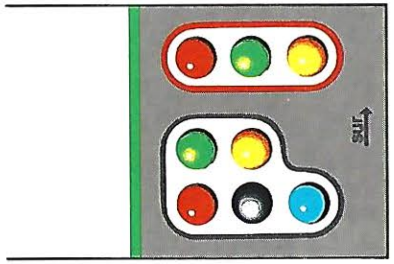
Im nächsten Beispiel haben wir eine schwarz umrandete Menge *A* und eine rot umrandete Menge *B*, dabei ist die Menge *A* mächtiger als die Menge *B*.
Bilden wir hier eine eindeutige Zuordnung zwischen *A* und *B*, so erhalten wir eine Abbildung von *A* **auf** *B*, die wir **Surjektion** nennen.

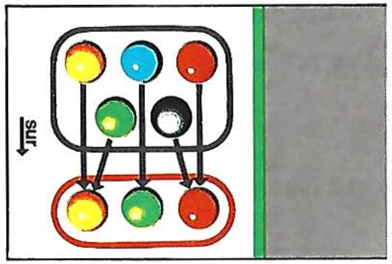
Definition der Surjektion: Eine Abbildung $A \longrightarrow B$, bei welcher jedes Element von *B* Bild von mindestens einem Element von *A* ist, heißt surjektive Abbildung oder Surjektion.

Wir schreiben:

$$A \xrightarrow{\text{sur}} B$$

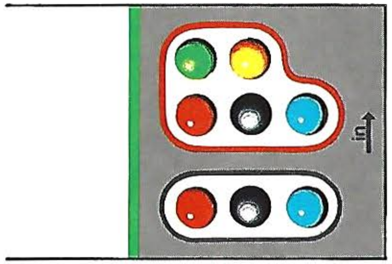
und lesen: „*A* auf *B*".

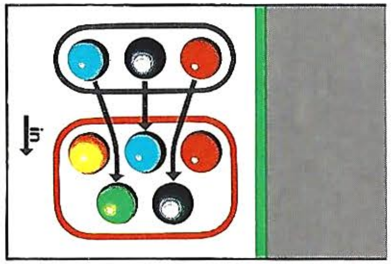




Ist dagegen die Menge *B* (rote Umrandung) mächtiger als die Menge *A* (schwarze Umrandung), und bilden wir eine eindeutige Zuordnung zwischen der Menge *A* und der Menge *B*, so erhalten wir eine Abbildung von *A* **in** *B***,** die wir **Injektion** nennen.

Definition der Injektion: Eine Abbildung $A \longrightarrow B$, bei welcher jedes Element von *B* Bild von höchstens einem Element von *A* ist, heißt injektive Abbildung oder Injektion.





Definition der Abbildung: Eine eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen der Menge *A* und denjenigen der Menge *B* heißt Abbildung. Eine Zuordnung ist eindeutig, wenn jedes Element von *A* nur einem Element von *B* zugeordnet ist.

Wir schreiben:

$$A \longrightarrow B$$

und lesen: „*A* Pfeil *B*“.

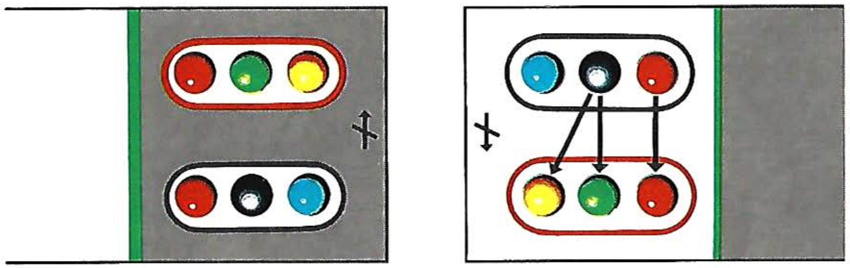
Ein andermal entscheiden sich die Kinder der Menge *A*, wie folgendes Beispiel zeigt: Cornelia möchte *am liebsten* wieder mit sich selbst spielen. Peter jedoch kann sich nicht eindeutig entscheiden; obwohl er sich nur einen Spielgefährten als den bevorzugtesten aussuchen kann, möchte er *am liebsten* sowohl mit Martin als auch mit Monika spielen. Thomas hingegen hat überhaupt keine Lust mehr, sich einen Spielgefährten auszuwählen, und kommt zu keiner Entscheidung.
In diesem Beispiel sind also den Elementen der Menge *A* die Elemente der Menge *B* **nicht eindeutig** zugeordnet, weil dem Element ● mehrere Elemente zugeordnet sind und dem Element ● überhaupt kein Element zugeordnet ist. Deshalb erhalten wir **keine Abbildung**.

Definition für keine Abbildung: Eine Zuordnung zwischen den Elementen der Menge *A* und den Elementen der Menge *B*, die nicht eindeutig ist, ist keine Abbildung. Eine Zuordnung ist nicht eindeutig, wenn ein Element von *A* keinem oder mehreren Elementen von *B* zugeordnet ist.

Wir schreiben:

$$A \nrightarrow B$$

und lesen: „*A* keine Abbildung *B*“.



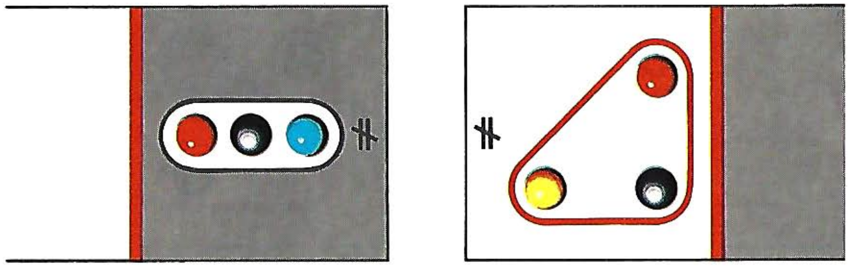
Wir haben wiederum zwei Mengen: eine Menge *C* und eine Menge *D*. Es handelt sich um verschiedene Mengen und wir lernen:

Definition von nicht identischen Mengen: Enthalten die beiden Mengen *C* und *D* verschiedene Elemente, so sind die beiden Mengen nicht identisch.

Wir schreiben:

$$C \neq D$$

und lesen: „*C* ungleich *D*“ oder auch „*C* nicht identisch mit *D*“.



C *D*

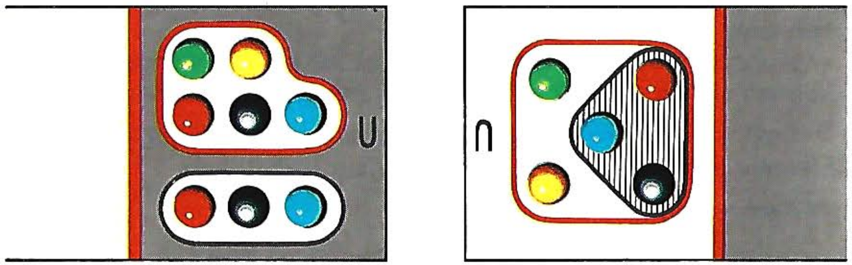
Im nachfolgenden Beispiel zeigen wir im Aufgabenfeld eine schwarz umrandete Menge *A* und eine rot umrandete Menge *B*. Wir stellen fest, daß die rote, schwarze und blaue Kugel der Menge *A* auch in der Menge *B* enthalten sind. Deshalb können wir sagen: *A* ist **Teilmenge** von *B*. Diese Teilmengenbeziehung haben wir im Lösungsfeld durch das Diagramm dargestellt und die Teilmenge selbst durch Schraffur gekennzeichnet. Allgemein gesagt:

Definition der Teilmenge: *A* heißt Teilmenge von *B*, wenn jedes Element von *A* auch zu *B* gehört.

Wir schreiben:

$$A \subset B$$

und lesen: „*A* ist Teilmenge von *B*“.



$\not\subset$

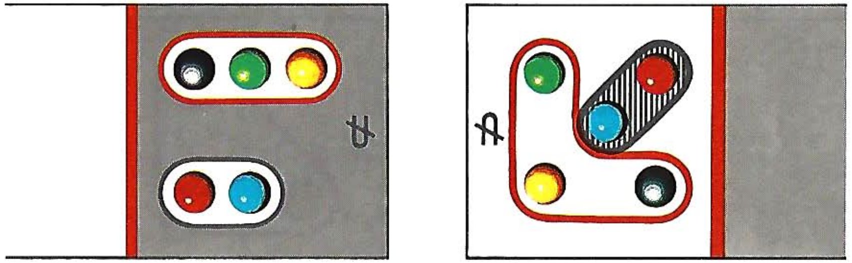
Das nun folgende Beispiel zeigt dagegen eine schwarz umrandete Menge *A*, deren Elemente **nicht** in der rot umrandeten Menge *B* enthalten sind. Wir sagen: *A* ist **nicht Teilmenge** von *B*.

Definition der Nicht-Teilmenge: Gehört nicht jedes Element von *A* auch zu *B*, dann ist *A* nicht Teilmenge von *B*.

Wir schreiben:

$$A \not\subset B$$

und lesen: „*A* ist nicht Teilmenge von *B*".



Wir erinnern uns, daß wir eingangs bestimmten, unsere Grundmenge enthalte die Objekte: rote, schwarze, blaue, grüne und gelbe Kugel. Wollten wir z. B. aus unserer Grundmenge eine Teilmenge entnehmen, die eine zweifarbige und eine dreifarbige Kugel enthält, so müßten wir feststellen, daß es eine Teilmenge mit der Eigenschaft *mehrfarbig* in unserer Grundmenge nicht gibt. Diese Teilmenge ist leer. Wir merken uns: Eine Teilmenge, die keine Elemente der Grundmenge enthält, heißt **leere Menge.**
Daraus, daß wir zu jeder beliebigen Grundmenge eine Teilmenge finden können, die nicht in der Grundmenge vorhandene Elemente enthält, folgern wir, daß die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist.
Wir könnten versuchen, weitere beliebige Teilmengen zu entnehmen, die nicht in unserer Grundmenge enthalten sind. Auch diese Teilmengen bleiben leer. Da sie alle gleich *leer* sind, sind sie identisch. Es ist also stets ein und dieselbe leere Menge, die wir entnehmen.
Aus der Identität folgt also, daß es nur **eine** leere Menge gibt. Wir können sie beliebig oft aus der Grundmenge entnehmen.

Definition der leeren Menge: Es gibt genau eine Menge, die kein Element enthält; sie heißt leere Menge.

Wir schreiben:

$$\emptyset$$

und lesen: „leere Menge" oder „Leermenge".

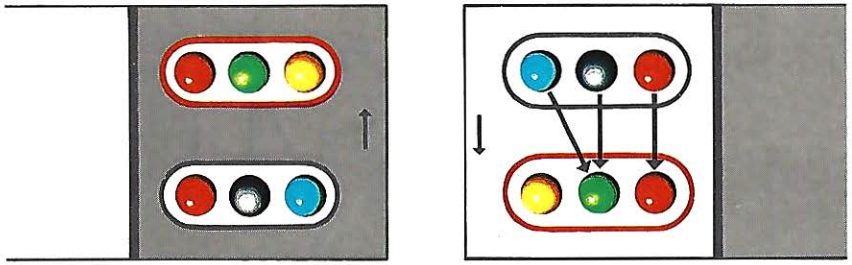
Definition des Produktes: Das Produkt zweier Mengen *A* und *B* ist gleich der Mächtigkeit ihrer Paarmenge bzw. ihres Cartesischen Produktes.

Wir schreiben:

$$\begin{array}{ccccc} |A| & \times & |B| & = & |A \times B| \\ \text{card}\,(A) & \times & \text{card}\,(B) & = & \text{card (Produkt)} \\ 2 & \times & 3 & = & 6 \end{array}$$

und lesen: „Mächtigkeit von *A* Kreuz Mächtigkeit von *B* ist gleich der Mächtigkeit des Cartesischen Produktes von *A* und *B*".

Wir haben auf Seite 12 unter „Gleichmächtigkeit" die *eineindeutige Zuordnung* kennengelernt. Sie ist gegeben, wenn jedes Element von *A* **genau einem** Element von *B* zugeordnet ist. Im Unterschied dazu werden wir jetzt die *eindeutige Zuordnung* zwischen den Elementen der Menge *A* und den Elementen der Menge *B* kennenlernen.
Dazu ein anschauliches Beispiel: Die Elemente der Menge *A* stellen wir uns vor als: Cornelia, Peter und Thomas; die Elemente der Menge *B* als: Cornelia, Martin und Monika. Die Kinder der Menge *A* sollen sich aus den Kindern der Menge *B* den Gefährten aussuchen, mit dem sie jetzt *am liebsten* spielen möchten: Cornelia möchte *am liebsten* mit sich selbst spielen, Peter möchte mit Martin spielen, und Thomas möchte auch *am liebsten* mit Martin spielen. Es ist eine **eindeutige Zuordnung** entstanden, wie unser Beispiel zeigt.
Diese Art Zuordnung, bei welcher eindeutig feststeht, welches Element der Menge *A* welchem Element der Menge *B* zugeordnet ist, nennen wir **Abbildung**.



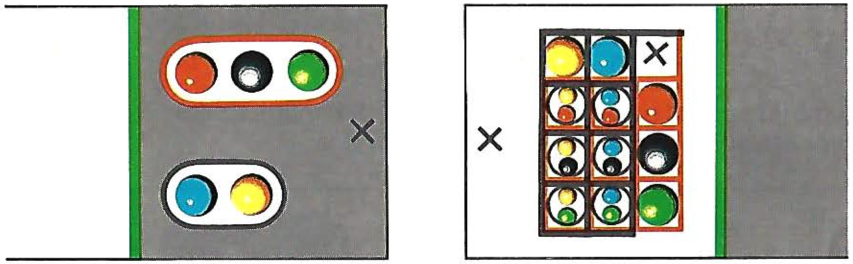
Paaren wir jedes Element von A mit jedem Element von B, also blau mit rot, blau mit schwarz, blau mit grün und dann gelb mit rot, gelb mit schwarz, gelb mit grün, so erhalten wir die vollständige Paarmenge von A und B, die wir auch **Verbindungsmenge** oder **Cartesisches Produkt** nennen.

Definition des Cartesischen Produktes: Die Menge aller geordneten Paare von Elementen aus A und B ist das Cartesische Produkt von A und B.

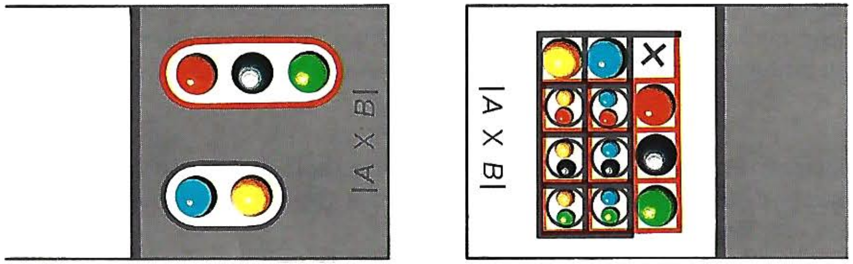
Wir schreiben:

$$A \times B$$

und lesen: „A Kreuz B“.

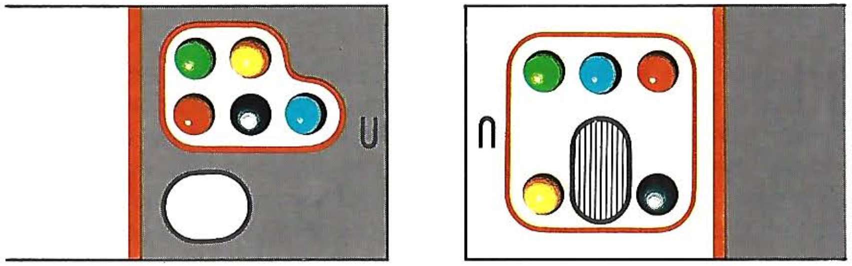


Jetzt haben wir eine schwarz umrandete Menge A mit der Mächtigkeit 2, $|A| = 2$ und eine rot umrandete Menge B mit der Mächtigkeit 3, $|B| = 3$. Paaren wir jedes Element von A mit jedem Element von B, bilden also das Cartesische Produkt, so ist die Mächtigkeit der Paarmenge gleich dem Produkt der Kardinalzahlen $2 \times 3 = 6$.



Eine leere Menge ist zugleich auch Teilmenge jeder Menge; für jede Menge gilt also:

$$\emptyset \subset M$$



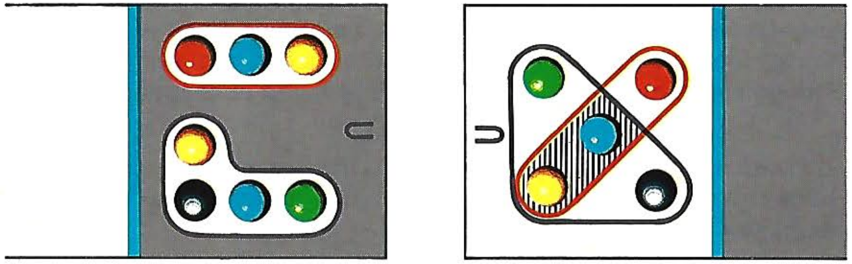
Im Aufgabenfeld des folgenden Beispiels wird die schwarz umrandete Menge A und die rot umrandete Menge B gezeigt. Verknüpfen wir die beiden Mengen derart miteinander, daß wir ihre gemeinsamen Elemente zusammenfassen, so erhalten wir die sogenannte **Schnittmenge.** Im Lösungsfeld ist das Ergebnis unserer Operation durch Schraffur gekennzeichnet. Allgemein gesagt:

Definition der Schnittmenge: Die Schnittmenge wird gebildet von allen Elementen, die **sowohl** in der einen **als auch** in der anderen Menge vorkommen.

Wir schreiben:

$$A \cap B$$

und lesen: „A geschnitten mit B“.



Im nun folgenden Beispiel haben wir die schwarz umrandete Menge A und die rot umrandete Menge B. Verknüpfen wir die Elemente der beiden Mengen in der Weise, daß wir **alle** ihre Elemente vereinigen, so erhalten wir die sogenannte **Vereinigungsmenge**, im Lösungsfeld durch Schraffur gekennzeichnet. Wir stellen fest:

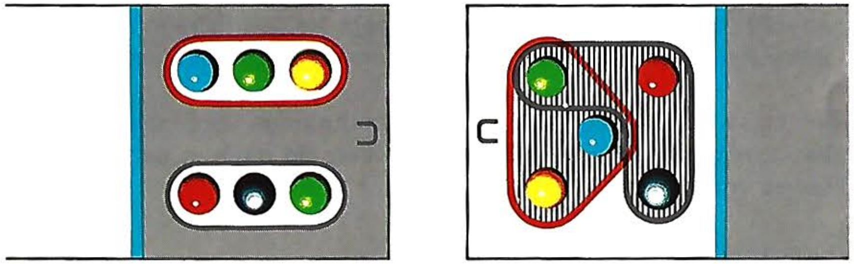
Definition der Vereinigungsmenge: Die Vereinigungsmenge von A und B bilden wir von allen Elementen, die zu A oder zu B gehören. (Dabei ist das **oder** im einschließenden Sinne zu verstehen.) In der mathematischen Logik bedeutet *einschließlich oder* soviel wie *eines von beiden oder auch beides*. Das „ausschließliche oder" entspricht unserem gewohnten Sprachgebrauch und bedeutet soviel wie *entweder das eine oder das andere*.

$\cup$

Wir schreiben:

$$A \cup B$$

und lesen: „A vereinigt mit B".



Wir haben wiederum eine schwarz umrandete Menge A und eine rot umrandete Menge B. Nehmen wir von der Menge A alle diejenigen Elemente fort, die sie mit der Menge B gemeinsam hat, in diesem Fall also die blaue Kugel, so bleibt eine Restmenge von A übrig, hier die rote und die schwarze Kugel, die wir **Differenzmenge** von A bezüglich B nennen. Wir können aussagen:

Definition der Differenzmenge: Die Differenzmenge von A zu B bilden wir von allen Elementen, die zu A gehören **und nicht** in B enthalten sind.

Im folgenden Beispiel haben wir eine schwarz umrandete Menge A mit der Mächtigkeit 5, $|A| = 5$ und eine rot umrandete Menge B mit der Mächtigkeit 3, $|B| = 3$. Alle Elemente der Menge B sind auch in der Menge A enthalten. B ist also eine Teilmenge von A, $B \subset A$.
Nehmen wir aus der Menge A die Elemente fort, die sie mit der Menge B gemeinsam hat, bilden also das Komplement von B in A, dann ist die Mächtigkeit dieser Komplementmenge gleich der **Differenz** der Kardinalzahlen $5 - 3 = 2$. Wir merken uns:

Definition der Differenz: Wenn $B \subset A$ ist, ist die Differenz der Mengen A und B gleich der Mächtigkeit des Komplements von B in A.

Wir schreiben:

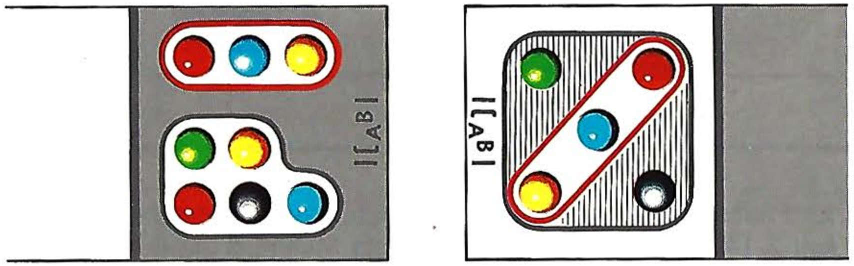
$$|A| \setminus |B| = |\complement_A^B|$$

$$\text{card}(A) - \text{card}(B) = \text{card}(\text{Differenz})$$

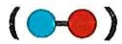
$$5 - 3 = 2$$

$-$

und lesen: „Mächtigkeit von A minus Mächtigkeit von B ist gleich der Mächtigkeit des Komplements von B in A".



Wir haben eine schwarz umrandete Menge A und eine rot umrandete Menge B. Aus der Menge A nehmen wir eine blaue Kugel, ● $\in A$ und aus der Menge B nehmen wir eine rote Kugel, ● $\in B$ und ordnen sie einander zu. Wir erhalten ein geordnetes Paar von je einem Element aus der Menge A und der Menge B:



Dieses Paar, dessen **Zusammengehörigkeit** durch eine Klammer ausgedrückt wird, ist ein neugebildetes Objekt einer neuen Menge, der sogenannten **Paarmenge.**

card

Die Menge in unserem Beispiel hat die Mächtigkeit $|M| = 5$; ihr wird das Symbol der Kardinalzahl „5" zugeordnet.
Die *leere Menge* erhält stets das Symbol der Kardinalzahl „0". Wird ordnen zwei Mengen nur dann das gleiche Symbol einer Kardinalzahl zu, wenn sie gleichmächtig sind, sonst erhalten sie verschiedene Symbole von Kardinalzahlen.

Definition der Kardinalzahl: Die Kardinalzahl einer Menge M ist das Symbol für die Mächtigkeit dieser Menge.

Wir schreiben:

$$\text{card}\,(M)$$

und lesen: „Kardinalzahl der Menge *M*".

+

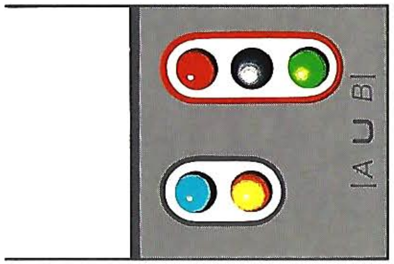
Nehmen wir z. B. eine schwarz umrandete Menge A mit der Mächtigkeit 2, $|A| = 2$, und eine rot umrandete Menge B mit der Mächtigkeit 3, $|B| = 3$. Beide Mengen haben keine gemeinsamen Elemente; ihre Schnittmenge ist leer, $A \cap B = \emptyset$. Vereinigen wir diese beiden Mengen $|A| \cup |B|$, so erhalten wir als Mächtigkeit der Vereinigungsmenge $|A \cup B|$ die Summe der Kardinalzahlen $2 + 3 = 5$. Wir kommen zur Aussage:

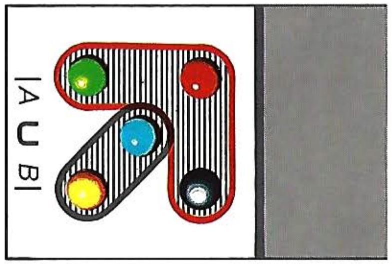
Definition der Summe: Die Summe zweier Mengen A und B, deren Schnittmenge leer ist, ist gleich der Mächtigkeit ihrer Vereinigungsmenge.

Wir schreiben:

$$|A| \cup |B| = |A \cup B|$$
$$\text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) = \text{card}\,(\text{Summe})$$
$$2 + 3 = 5$$

und lesen: „Mächtigkeit von *A* vereinigt mit Mächtigkeit von *B* ist gleich der Mächtigkeit der Vereinigungsmenge von *A* und *B*".

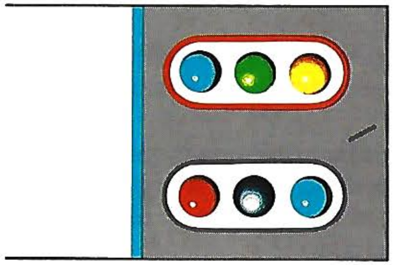


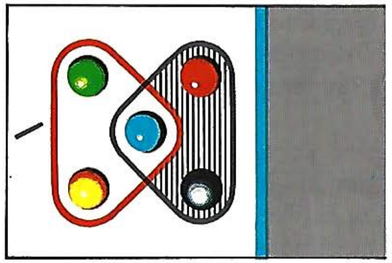


Wir schreiben:

$$A \setminus B$$

und lesen: „*A* Differenz *B*".





****

Wir haben eine schwarz umrandete Menge A und eine rot umrandete Menge B. In dem nun folgenden Beispiel sind alle Elemente der Menge B auch in der Menge A enthalten, das heißt, B ist Teilmenge von A, also $B \subset A$. In diesem Fall ist die Differenzmenge $A \setminus B$ auch eine **Komplementmenge** (= Ergänzungsmenge), oder auch Komplement von B in A. Wir bestimmen:

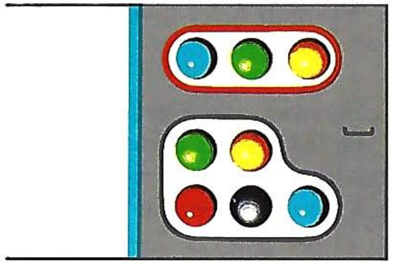
Definition der Komplementmenge: Ist $B \subset A$, so heißt die Differenz $A \setminus B$ Komplement von B in A.

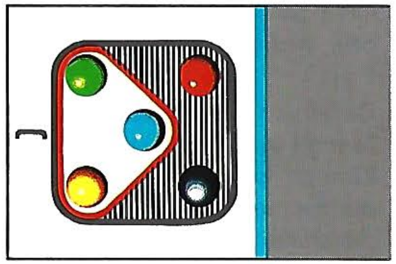
Wir schreiben:

$$\complement_A^{\,B}$$

und lesen: „Komplement von *B* in *A*".

∁





Wir haben eine schwarz umrandete Menge *A* und eine rot umrandete Menge *B*, die wir einander zuordnen wollen. Dabei entdecken wir, daß wir jedem Element von *A* genau ein Element von *B* zuordnen können, weil die Menge *A* genausoviel Elemente enthält wie die Menge *B*. Die beiden Mengen sind gleichmächtig, sie sind **äquivalent**.
Derartige Zuordnungen von untereinander gleichmächtigen Mengen nennen wir **eineindeutige Zuordnungen.** Wir merken:

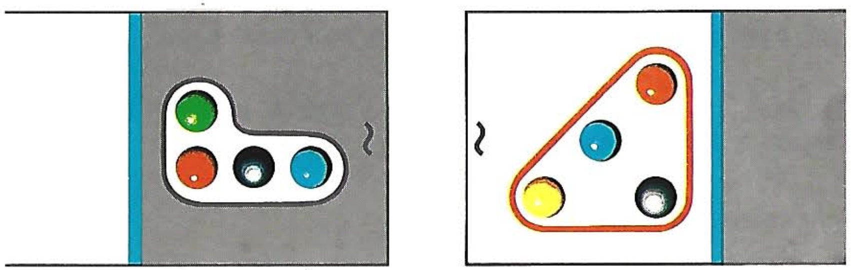
Definition der Äquivalenz: Können wir jedem Element der Menge *A* genau ein Element der Menge *B* zuordnen, so ist *A* gleichmächtig zu *B*. Wir sagen auch: *A* ist äquivalent zu *B*. Wenn *A* zu *B* gleichmächtig ist, ist auch *B* zu *A* gleichmächtig.

$\sim$

Wir schreiben:

$$A \sim B \text{ bzw. } B \sim A$$

und lesen: „*A* und *B* sind gleichmächtig".



A *B*

Im folgenden Beispiel lassen sich die Elemente der schwarz umrandeten Menge *A* den Elementen der rot umrandeten Menge *B* **nicht eindeutig** zuordnen, weil diese Mengen nicht gleichmächtig bzw. **nicht äquivalent** sind. Wir lernen:

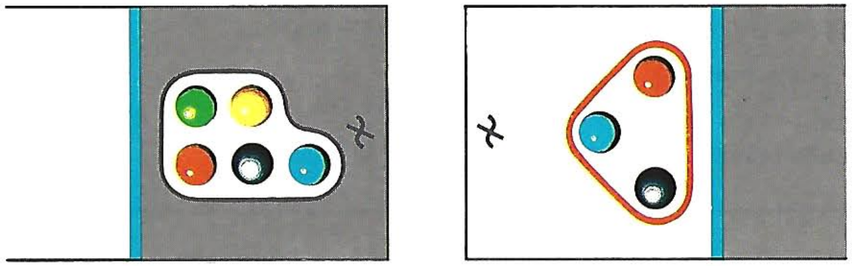
Definition der Nicht-Äquivalenz: Können wir den Elementen der Menge *A* nicht genau ein Element der Menge *B* zuordnen und können wir umgekehrt den Elementen der Menge *B* nicht genau ein Element der Menge *A* zuordnen, so sind diese Mengen nicht gleichmächtig bzw. nicht äquivalent.

$\nsim$

Wir schreiben:

$$A \nsim B \text{ bzw. } B \nsim A$$

und lesen: „*A* und *B* sind nicht gleichmächtig".



A *B*

Unsere gewohnten Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5 usw., die sogenannten „natürlichen Zahlen", finden kardinale Verwendung in Form von Symbolen, die angeben, wie viele Elemente eine Menge hat. Durch das Zählen der Elemente wird eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Mengenelementen und den Zahlen hergestellt. Das Symbol der Kardinalzahl, das dabei dem letzten Element einer Menge zugeordnet wird, gibt die Anzahl oder die **Mächtigkeit** der Elemente dieser Menge an.

Definition der Mächtigkeit: Die Mächtigkeit einer Menge *M* ist gleich der Anzahl der Elemente dieser Menge.

$|\ |$

Wir schreiben:

$$|M|$$

und lesen: „Mächtigkeit von *M*".